UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS

P.A.: 2024-2
Fecha: 19/11/2024

CUARTA PRÁCTICA CALIFICADA DE CÁLCULO INTEGRAL (BMA02-C)

APELLIDOS Y NOMBRES:	NOTA		FIRMA DOCENTE
	NÚMERO	LETRAS	
CÓDIGO: SECCIÓN: "C"			
FIRMA:			

INDICACIONES:

1. *Duración: 110 minutos.*
2. *No se permite el uso de ningún tipo de material. Solo lapiceros y hojas borrador sin apuntes.*
3. *Celulares apagados. Sin calculadoras.*
4. *Se considerará el orden y limpieza durante sus procedimientos y resultados.*

PREGUNTA 1. (4 puntos) Resuelve y <u>exprese la solución en forma **implícita:**</u>

$$(6x + 5y + 4)dy + (3x + 2y + 1)dx = 0$$

<u>Solución:</u> MYP: P#1: Reducible a EDOH: $L_1: 6x+5y+4=0$, $L_2: 3x+2y+1=0 \Rightarrow L_1 \cap L_2: \begin{cases} 6x+5y=-4 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$

$x_0 = 1;\ y_0 = -2$

$$\begin{cases} x = z + x_0 \to x = z+1 \to dx = dz \\ y = w + y_0 \to y = w-2 \to dy = dw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x-1 \leftarrow \\ w = y+2 \leftarrow \end{cases}$$

P#2: $(6(z+1)+5(w-2)+4)dw + (3(z+1)+2(w-2)+1)dz = 0 \Rightarrow (6z+5w)dw + (3z+2w)dz = 0$ {EDOH}

Hacemos: $t = \frac{w}{z} \Rightarrow w = tz \Rightarrow dw = t\,dz + z\,dt \Rightarrow (6z+5\underset{tz}{w})(t\,dz + z\,dt) + (3z+2\underset{tz}{w})dz = 0$

Resolviendo: $\cancel{z}(6+5t)(t\,dz + z\,dt) + \cancel{z}(3+2t)dz = 0 \Rightarrow -\frac{dz}{z} = \frac{(5t+6)\,dt}{5t^2+8t+3}$ {Ec. V. Sep.}

P#3: $-\int \frac{dz}{z} = \int \frac{(5t+6)\,dt}{5t^2+8t+3} \Rightarrow -\ln z + c_1 = \int \left(\frac{t+6/5}{t^2+\frac{8}{5}t+\frac{3}{5}}\right)dt = \int \frac{(-1/2)\,dt}{t+1} + \int \frac{(3/2)\,dt}{t+3/5}$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{1}{z}\right| + c_1 = \left(\frac{-1}{2}\right)\ln|t+1| + \left(\frac{3}{2}\right)\ln|t+3/5| = \ln\left|(t+1)^{-1/2}(t+3/5)^{3/2}\right|$

$e \qquad\qquad e$

$\Rightarrow \frac{1}{z}\cdot e^{c_1} = (t+1)^{-1/2}(t+3/5)^{3/2} \rightsquigarrow e^{c_1} = K = z(t+1)^{-1/2}(t+3/5)^{3/2}$

P#4: Soluc. General, Forma Implícita: $K = z(t+1)^{-1/2}(t+3/5)^{3/2}$; $z = x-1$; $t = \frac{w}{z} = \frac{y+2}{x-1}$

$$(\sigma e) \to K = (x-1)\left(\frac{y+2}{x-1}+1\right)^{-1/2}\left(\frac{y+2}{x-1}+\frac{3}{5}\right)^{3/2}$$ ← Rpta ①

Solución General, Forma Implícita

PREGUNTA 2. (3 puntos) Resuelve y <u>exprese la solución en forma **explícita:**</u>

$$y' = Sen^2(x - y + 1) \;\; con \;\; PVI: y(0) = 1$$

<u>**Solución:**</u> M4P: P#1: $y' = Sen^2(x-y+1)$; $z = x-y+1 \to z' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - z'$

P#2: $1 - z' = Sen^2(z) \Rightarrow z' = 1 - Sen^2(z) \Rightarrow z' = Cos^2(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = Cos^2 z$

$\to Sec^2 z\, dz = dx$ {Ec. Dif. Variable Separable}

P#3: $\int Sec^2 z\, dz = \int dx \Rightarrow \tan z = x + c_1 \Rightarrow \tan(x-y+1) = x + c_1$

PVI: $x=0, y=1 \Rightarrow \tan(0-1+1) = 0 + c_1 \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \to c_1 = 0$

P#4: $\tan(x-y+1) = x + 0 \Rightarrow \tan(x-y+1) = x \Rightarrow x - y + 1 = \text{Arctan}(x)$

$\therefore \; y = x - \text{Arctan}(x) + 1$ ← Rpta (2) Solución particular Forma explícita

PREGUNTA 3. (3 puntos) Resuelve y <u>exprese la solución en forma **implícita:**</u>

$$(y^3 + 2e^x y)dx + (e^x + 3y^2)dy = 0$$

<u>**Solución:**</u> M4P: P#1: $M(x,y) = y^3 + 2e^x y$; $N(x,y) = e^x + 3y^2$

Comprobamos: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 2e^x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \to \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ (No es exacta)

P#2: Factor Integrante: $\mu(x)$: $\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\mu}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\mu \cdot \left(\frac{1}{e^x + 3y^2}\right)\left(e^x - 3y^2 - 2e^x\right)$

$\partial \mu = \mu\, \partial x \to \int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \partial x \Rightarrow \ln \mu = x \to \boxed{\mu = e^x}$

$\begin{cases} M^* = e^x(y^3 + 2e^x y) \\ N^* = e^x(e^x + 3y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial y} = 3y^2e^x + 2e^{2x}$; $\frac{\partial N^*}{\partial x} = 2e^{2x} + 3y^2 e^x \Rightarrow \frac{\partial M^*}{\partial y} = \frac{\partial N^*}{\partial x}$ ✓

P#3: $C_1 = \phi(x,y) = \int M^* dx + \int\left(N^* - \frac{\partial}{\partial y}\int M^* dx\right)dy \Rightarrow \int M^* dx = e^x y^3 + e^{2x} y$

$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\dots) = 3e^x y^2 + e^{2x}$

$\to C_1 = (e^x y^3 + e^{2x} y) + \int \left(e^{2x} + 3y^2 e^x - (3e^x y^2 + e^{2x})\right) dy$ (= 0)

$\hookrightarrow C_1 = e^x y^3 + e^{2x} y = e^x(y^3 + y e^x) \Rightarrow$ P#4: $C_1 = y e^x (y^2 + e^x)$ ← Rpta (3)

Soluc. General; Forma Implícita

PREGUNTA 4. (3 puntos) Resuelve y exprese la solución en forma **explícita:**

$$(x\,Senx)y' + (Senx + x\,Cosx)y = x\,e^{x}$$

Solución: M4P: P#1: $y' + \left(\frac{Sinx + x\,Cosx}{x\,Sinx}\right) y = \frac{xe^{x}}{x\,Sinx} \Rightarrow \begin{cases} P(x) = \frac{1}{x} + ctgx \\ Q(x) = e^{x} Cscx \end{cases}$

P#2: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C_1\right] = e^{-\int\left(\frac{1}{x}+ctgx\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{1}{x}+ctgx\right)dx} e^{x} Cscx\,dx + C_1\right]$

$\rightarrow y = e^{-(\ln x + \ln(Sinx))}\left[\int e^{(\ln x + \ln(Sinx))} e^{x} Cscx\,dx + C_1\right]$

$y = (x^{-1}) Cscx\left[\int x\,Sinx\,e^{x}\,Cscx\,dx + C_1\right] = (x^{-1}) Cscx\left[e^{x}(x-1) + C_1\right]$

P#3: $y = \frac{e^{x}(x-1)}{x\,Sinx} + \frac{C_1}{x\,Sinx}$ ← Rpta (4) $\begin{cases} \text{Solución General } (C_1 = cte) \\ \text{Forma Explícita: } y(x) \end{cases}$

PREGUNTA 5. (3 puntos) Resuelve y exprese la solución en forma **implícita:**

$$2Cosy\,dx - (xSeny - x^{3})dy = 0$$

Solución: M4P: P#1: $2Cosy\,dx = (xSiny - x^{3})\,dy \Rightarrow 2Cosy\frac{dx}{dy} - xSiny = -x^{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right) - \left(\frac{x}{2}tgy\right) = \left(-\frac{Secy}{2}\right)x^{3} \rightarrow$ Bernoulli $(n=3) \Rightarrow z = x^{1-n} \rightarrow z = x^{-2}$

P#2: $z = x^{-2} \rightarrow z' = (-2x^{-3})x'$, $\frac{dx}{dy} = x'$ $\quad (-2x^{-3})\left(\frac{dx}{dy}\right) + (-2x^{-3})\left(-\frac{tgy}{2}\right)(x) = (-2x^{-3})\left(-\frac{Secy}{2}\right)x^{3}$

$z' + (tgy)x^{-2} = Secy$

$z' + (tgy)\,z = Secy \quad$ EDOL $(z = x^{-2})$ $\begin{cases} P(y) = tgy \\ Q(y) = Secy \end{cases}$

P#3: Solución:

$z = x^{-2} = e^{-\int P(y)dy}\left[\int e^{\int P(y)dy} Q(y)dy + C_1\right] \Rightarrow x^{-2} = e^{-\int tgy\,dy}\left[\int e^{\int tgy\,dy} Secy\,dy + C_1\right]$

$\Rightarrow x^{-2} = e^{\ln(Cosy)}\left[\int e^{-\ln(Cosy)} Secy\,dy + C_1\right] \Rightarrow x^{-2} = Cosy\left[\int Sec^{2}y\,dy + C_1\right]$

$\Rightarrow x^{-2} = Cosy\left[tgy + C_1\right] \Rightarrow x^{-2} = Siny + C_1 Cosy \Rightarrow 0 = -x^{-2} + Siny + C_1 Cosy$

P#4: $Siny + C_1 Cosy - \frac{1}{x^{2}} = 0$ ← Rpta (5) $\rightarrow F(x,y) = 0$ $\begin{cases} \text{Solución General } (C_1 = cte) \\ \text{Forma Implícita} \end{cases}$

PREGUNTA 6. (4 puntos) Resuelve y exprese la solución en forma implícita:

$$\left[1-\frac{ArgCosh\left(\frac{1}{x^2y^4}\right)}{Ln(x^4+y^4)}\right]\left(\frac{2x^3dx+2y^3dy}{xy^4dx+2x^2y^3dy}\right)+\frac{x^4+y^4}{x^2y^4\sqrt{1-x^4y^8}}=0$$

Solución: MUP: P#1: Cambios de variable: $z = \ln(x^4+y^4) \rightarrow dz = \frac{4x^3dx+4y^3dy}{(x^4+y^4)}$

$\rightarrow w = \text{ArgCosh}\left(\frac{1}{x^2y^4}\right) \rightarrow dw = \frac{\frac{-2xy^4}{x^4y^8}dx - \frac{4y^3x^2}{x^4y^8}dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2y^4}\right)^2-1}}$; Recuerda: $d\,\text{ArgCosh}(u) = \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$ //

$\therefore dw = -\left(\frac{2xy^4dx+4x^2y^3dy}{x^2y^4\sqrt{1-x^4y^8}}\right)$

P#2: $\left\{\left[1-\frac{w}{z}\right]\left(\frac{4x^3dx+4y^3dy}{2xy^4dx+4x^2y^3dy}\right)+\left(\frac{x^4+y^4}{x^2y^4\sqrt{1-x^4y^8}}\right)=0\right\}\left\{\frac{2xy^4dx+4x^2y^3dy}{x^4+y^4}\right\}$

$\Rightarrow \left[1-\frac{w}{z}\right]\left(\frac{4x^3dx+4y^3dy}{x^4+y^4}\right)+\left(\frac{2xy^4dx+4x^2y^3dy}{x^2y^4\sqrt{1-x^4y^8}}\right)=0$

(el primer paréntesis $= dz$; el segundo $= -dw$)

$\begin{cases} \text{EDOH}: v = \frac{w}{z} \rightarrow w = vz \\ dw = v\,dz + z\,dv \end{cases}$

$\Rightarrow \left[1-\frac{w}{z}\right]dz - dw = 0 \Rightarrow (z-w)\,dz = z\,dw \Rightarrow$

$\rightarrow (z-vz)\,dz = z(v\,dz+z\,dv) \Rightarrow (1-2v)\,dz = z\,dv \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dv}{1-2v}$ {ED V. Sep.}

P#3: $\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dv}{1-2v} = \ln z = -\frac{1}{2}\ln|1-2v| + c_1 \Rightarrow 2\ln|z| + \ln|1-2v| = c_1$

$e^{\ln|z^2(1-2v)|} = e^{c_1} = \mathbb{K}$

$\Rightarrow z^2(1-2v) = \mathbb{K}$; $\begin{cases} z = \ln(x^4+y^4) \\ v = \frac{w}{z} = \left(\frac{1}{\ln(x^4+y^4)}\right)\cdot \text{ArgCosh}\left(\frac{1}{x^2y^4}\right) \end{cases}$

P#4: $\mathbb{K} = z^2 - 2vz^2 = \ln^2(x^4+y^4) - 2\ln(x^4+y^4)\,\text{ArgCosh}\left(\frac{1}{x^2y^4}\right)$

$\therefore \ln^2(x^4+y^4) - 2\ln(x^4+y^4)\,\text{ArgCosh}\left(\frac{1}{x^2y^4}\right) = \mathbb{K}$ ← Rpta (6)

Solución General, Forma Implícita